

Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vierdegraadsfunctie

1 maximumscore 4

- $f'(x) = 4x^3 - 60x$ 1
- $f''(x) = 12x^2 - 60$ 1
- $f''(x) = 0$ als $x^2 = 5$ 1
- Dus de y-coördinaat van de buigpunten is $(5^2 - 30 \cdot 5) = -125$ 1

2 maximumscore 4

- De vergelijking $x^4 - 30x^2 + 125 = 0$ moet worden opgelost 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $x^2 = 5$ of $x^2 = 25$ 1
- $x_A = -5$ (, $x_B = -\sqrt{5}$, $x_C = \sqrt{5}$) en $x_D = 5$ 1
- De gevraagde lengte is 10 1

Druppel

3 maximumscore 6

- $x'(t) = \cos(t) \cdot (\cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot -\sin(t)$ 2
- Dit herleiden tot $\cos(2t) - \cos(t)$ 1
- $\cos(2t) - \cos(t) = 0$ geeft $2t = t + k \cdot 2\pi$ of $2t = -t + k \cdot 2\pi$ 1
- Dit geeft $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ 1
- De coördinaten zijn $(0, 1)$, $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ 1

of

- $x(t) = \sin(t) \cdot \cos(t) - \sin(t) = 0,5 \sin(2t) - \sin(t)$ 1
- $x'(t) = \cos(2t) - \cos(t)$ 2
- $\cos(2t) - \cos(t) = 0$ geeft $2t = t + k \cdot 2\pi$ of $2t = -t + k \cdot 2\pi$ 1
- Dit geeft $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ 1
- De coördinaten zijn $(0, 1)$, $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ 1

of

- $x'(t) = \cos(t) \cdot (\cos(t) - 1) + \sin(t) \cdot -\sin(t)$ 2
- Dit herleiden tot $2\cos^2(t) - \cos(t) - 1$ 1
- $2\cos^2(t) - \cos(t) - 1 = 0$ geeft (met behulp van substitutie) $\cos(t) = 1$ of $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ 1
- Dit geeft $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ 1
- De coördinaten zijn $(0, 1)$, $(-\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ 1

Opmerking

Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief, het tweede antwoordelement van het tweede antwoordalternatief en het eerste antwoordelement van het derde antwoordalternatief uitsluitend 0 of 2 scorepunten toekennen, tenzij de enige fout een rekenfout betreft (zie vakspecifieke regel 1). In dat geval mag 1 scorepunt worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
4	maximumscore 4	
	$x^2 = \sin^2(t) \cdot (\cos(t) - 1)^2$	1
	$x^2 = (1 - \cos^2(t)) \cdot (\cos(t) - 1)^2$	1
	$x^2 = (1 - y^2) \cdot (y - 1)^2$	1
	$x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ (en dus geldt dit voor alle punten van K)	1
	of	
	(Voor iedere waarde van t moet gelden:) $\sin^2(t) \cdot (\cos(t) - 1)^2 = -\cos^4(t) + 2\cos^3(t) - 2\cos(t) + 1$	1
	$(1 - \cos^2(t)) \cdot (\cos(t) - 1)^2 = -\cos^4(t) + 2\cos^3(t) - 2\cos(t) + 1$	1
	$(1 - \cos^2(t)) \cdot (\cos^2(t) - 2\cos(t) + 1) = -\cos^4(t) + 2\cos^3(t) - 2\cos(t) + 1$	1
	$-\cos^4(t) + 2\cos^3(t) - 2\cos(t) + 1 = -\cos^4(t) + 2\cos^3(t) - 2\cos(t) + 1$ (en dus geldt $x^2 = -y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ voor alle punten van K)	1
5	maximumscore 4	
	Het bereik van y is $[-1, 1]$	1
	$I = \pi \cdot \int_{-1}^1 x^2 dy = \pi \cdot \int_{-1}^1 (-y^4 + 2y^3 - 2y + 1) dy$	1
	Een primitieve van $-y^4 + 2y^3 - 2y + 1$ is $-\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{2}y^4 - y^2 + y$	1
	$I = 1\frac{3}{5}\pi$	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Cirkels in een cirkel

6 maximumscore 3

- $MP = 3 - r$ 1
- (De stelling van Pythagoras in driehoek MSP geeft) $MS = \sqrt{(3 - r)^2 - r^2}$ 1
- Herleiden tot $MS = \sqrt{9 - 6r}$ 1

7 maximumscore 6

- $NP = r + 2$ 1
- $NS = \sqrt{9 - 6r} + 1$ 1
- (De stelling van Pythagoras in driehoek NSP geeft)
 $r^2 + (\sqrt{9 - 6r} + 1)^2 = (r + 2)^2$ 1
- Herleiden tot $\sqrt{9 - 6r} = 5r - 3$ 1
- Hieruit volgt $25r^2 - 24r = 0$ 1
- De oplossing $r = \frac{24}{25}$ ($r = 0$ voldoet niet) 1

Een wortelfunctie en haar inverse

8 maximumscore 3

- Voor punten op de grafiek van f geldt: $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}y^2 - 1}$$
 1
- Dit geeft $x^2 + 1 = \frac{1}{2}y^2$ 1
- Herleiden tot $y = \sqrt{2x^2 + 2}$ ($y = -\sqrt{2x^2 + 2}$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse) 1

of

- Voor punten op de grafiek van g geldt: $y = \sqrt{2x^2 + 2}$, dus voor de inverse geldt (door spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$) het verband $x = \sqrt{2y^2 + 2}$ 1
- Dit geeft $x^2 - 2 = 2y^2$ 1
- Herleiden tot $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ ($y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse) 1

of

- Er moet gelden $g(f(x)) = x$ (of $f(g(x)) = x$) 1
- $g(f(x)) = \sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 - 1) + 2}$ 1
- Herleiden tot $\sqrt{x^2} = x$ ($\sqrt{x^2} = -x$ voldoet niet) (en dus zijn f en g elkaars inverse) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

9 maximumscore 5

- $\frac{dPQ}{da} = 3\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \cdot 2a$ 2
- PQ is minimaal als $\frac{4a}{\sqrt{a^2-1}} = 3\sqrt{2}$ 1
- Herleiden tot $16a^2 = 18(a^2-1)$ 1
- Het antwoord $a = 3$ ($a = -3$ voldoet niet) 1

of

- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2-1}} \cdot x$ 2
- PQ is minimaal als $f'(x) = 1$ 1
- $\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2-1}} \cdot x = 1$ herleiden tot $x^2 = 4(\frac{1}{2}x^2-1)$ 1
- Hieruit volgt $x = 2$ ($x = -2$ voldoet niet), dus $P(2,1)$. Omdat P op de lijn met vergelijking $y = -x + a$ ligt, volgt $a = 3$ 1

of

- $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+2}} \cdot 4x$ 2
- PQ is minimaal als $g'(x) = 1$ 1
- $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+2}} \cdot 4x = 1$ herleiden tot $4x^2 = 2x^2 + 2$ 1
- Hieruit volgt $x = 1$ ($x = -1$ voldoet niet), dus $Q(1,2)$. Omdat Q op de lijn met vergelijking $y = -x + a$ ligt, volgt $a = 3$ 1

Opmerking

Voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten toekennen, tenzij de enige fout een rekenfout betreft (zie vakspecifieke regel 1). In dat geval mag 1 scorepunt worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

10 maximumscore 6

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan

$$\int_0^{1,41\dots} g(x) dx + \int_{1,41\dots}^7 (g(x) - f(x)) dx + \int_7^{10} (-x + 17 - f(x)) dx \quad 2$$

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1
- De oppervlakte is gelijk aan een vierkant van 10 bij 10 waarvan drie

$$\text{stukken worden afgehaald, ofwel } 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot \int_{1,41\dots}^{10} f(x) dx \quad 2$$

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of

- De grafiek van f snijdt de x -as voor $x = 1,41\dots$ (of $x = \sqrt{2}$) 1
- Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt $(7, 10)$ 1

- De oppervlakte is gelijk aan $\int_0^7 g(x) dx + \int_7^{10} (-x + 17) dx - \int_{1,41\dots}^{10} f(x) dx$ 2

- Beschrijven hoe deze oppervlakte berekend kan worden 1
- De gevraagde oppervlakte is 29,24 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	Lijn k snijdt de grafiek van g in het punt (7,10)	1
	Beschrijven hoe $\int_0^7 (g(x) - x) dx$ berekend kan worden	1
	$\int_0^7 (g(x) - x) dx = 12,369...$	1
	Het snijpunt van lijn k met de lijn met vergelijking $y = x$ is (8,5; 8,5)	1
	De oppervlakte van de driehoek ingesloten door de lijn met vergelijking $y = x$, de lijn met vergelijking $x = 7$ en lijn k is $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 = 2,25$	1
	De gevraagde oppervlakte is $(2 \cdot (12,369... + 2,25) =) 29,24$	1

Opmerkingen

- Bij het eerste en derde antwoordalternatief mag voor het derde antwoordelement 1 scorepunt worden toegekend als twee van de drie vlakdelen juist zijn.
- Bij het tweede antwoordalternatief mogen voor het derde antwoordelement geen scorepunten worden toegekend als alleen $10^2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2$ genoemd is.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Op en neer

11 maximumscore 3

- In het laagste punt geldt $Z_{\text{blokje}} = 50$ dus $Z_{\text{veer}} = 200$ 1
- In het hoogste punt geldt $Z_{\text{blokje}} = 250$ dus $Z_{\text{veer}} = 300$ 1
- Een toelichting waaruit blijkt dat de evenwichtsstand 250 is en de amplitude 50 1

of

- Het inzicht dat het gemiddelde van 350 en Z_{blokje} de formule voor Z_{veer} geeft 1
- Dus $Z_{\text{veer}} = \frac{1}{2} \cdot (350 + 150 - 100 \cos(4t))$ 1
- Een toelichting waaruit blijkt dat de evenwichtsstand 250 is en de amplitude 50 1

12 maximumscore 3

- (v is de afgeleide van Z_{blokje} dus) $v(t) = 400 \sin(4t)$ 1
- Uit $400 \sin(4t) = 255$ volgt $4t = 0,69\dots$ of $4t = 2,45\dots$ 1
- De gevraagde hoogtes zijn $150 - 77 = 73$ (cm) en $150 + 77 = 227$ (cm) 1

of

- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{d}{dt}(150 - 100 \cos(4t)) = 255$ opgelost kan worden 1
- Hieruit volgt $t = 0,17\dots$ of $t = 0,61\dots$ 1
- De gevraagde hoogtes zijn $150 - 77 = 73$ (cm) en $150 + 77 = 227$ (cm) 1

Opmerking

Als de kandidaat slechts één van de gevraagde hoogtes berekent, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

13 maximumscore 3

- Het aandeel van Z_{blokje} is $\frac{1000}{1600}$ en het aandeel van Z_{veer} is $\frac{600}{1600}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen) 1
- Dus $Z_{\text{totaal}}(t) = \frac{1000}{1600} \cdot (150 - 100 \cos(4t)) + \frac{600}{1600} \cdot (250 - 50 \cos(4t))$ 1
- Dit herleiden tot $Z_{\text{totaal}}(t) = 187,5 - 81,25 \cos(4t)$ 1

Opmerking

Als de kandidaat geen gebruik maakt van de getallen 600 en 1000, voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

Een raaklijn met twee cirkels

14 maximumscore 4

- Een vectorvoorstelling van de lijn door P, loodrecht op k is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3p+32 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 1
- Voor het snijpunt met lijn k geldt $\begin{cases} p+s=t \\ 3p+32+s=20-t \end{cases}$ 1
- Dit geeft $s = -2p-6$ (of $t = -p-6$) dus $x = -p-6$ 1
- $y = 3p+32-2p-6 = p+26$ (en dus zijn de coördinaten van P' juist) 1

of

- Een vergelijking van lijn k is $y = -x + 20$ 1
- Een vergelijking van de lijn door P, loodrecht op k is $y = x + 2p + 32$ 1
- Uit $x + 2p + 32 = -x + 20$ volgt $x = -p - 6$ 1
- $y = -(-p-6) + 20 = p + 26$ (en dus zijn de coördinaten van P' juist) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van lijn k is -1 (en P' ligt op k) 1
- (Omdat PP' loodrecht staat op k, moet gelden:) de richtingscoëfficiënt van PP' is gelijk aan 1 1
- Dus $\frac{3p+32-(p+26)}{p-(-p-6)} = 1$ 1
- Hieruit volgt $2p+6 = 2p+6$ (ofwel dat de coördinaten van P' juist zijn) 1

15 maximumscore 5

- $PP' = \sqrt{(-p-6-p)^2 + (p+26-(3p+32))^2} = \sqrt{8p^2 + 48p + 72}$ 1
- $PB = \sqrt{(-18-p)^2 + (-2-(3p+32))^2} = \sqrt{10p^2 + 240p + 1480}$ 1
- $PP' = PB$ herleiden tot $p^2 + 96p + 704 = 0$ (of een vergelijkbare kwadratische uitdrukking in p) 1
- Dit geeft $p = -8$ en $p = -88$ 1
- De gevraagde coördinaten zijn $(-8, 8)$ en $(-88, -232)$ 1

Logaritmische functies

16 maximumscore 4

- De afstand van A tot O is $\sqrt{a^2 + \ln^2(a+1)}$ en de afstand van B tot O is $\sqrt{a^2 + \ln^2(a)}$ 1
- De vergelijking $\sqrt{a^2 + \ln^2(a)} - \sqrt{a^2 + \ln^2(a+1)} = 2$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- De gevraagde waarde van a is 0,12 1

17 maximumscore 4

- Afstand AB is $\ln(a+1) - \ln(pa)$ 1
- $\ln(a+1) - \ln(pa) = \ln\left(\frac{a+1}{pa}\right)$ 1
- $\left(\frac{a+1}{pa} = \frac{1+\frac{1}{a}}{p} \text{ dus} \right) \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{a}}{p}\right) = \frac{1}{p}$ 1
- $\ln\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ geeft $p = \frac{1}{e}$ 1

of

- Afstand AB is $\ln(a+1) - \ln(pa)$ 1
- $\ln(a+1) - \ln(pa) = \ln(a+1) - \ln(p) - \ln(a) = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) - \ln(p)$ 1
- $\left(\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \text{ dus} \right) \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{a}\right) = 1$ 1
- $-\ln(p) = 1$ (ofwel $\ln(p) = -1$) geeft $p = \frac{1}{e}$ 1

18 maximumscore 6

- $h'_q(x) = \frac{1}{2x}$ (voor $x < 0$) 1
- Voor punten op de grafiek van f met een negatieve x-coördinaat geldt $y = -\ln(x+1)$ 1
- Voor deze punten geldt $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+1}$ 1
- $\frac{1}{2x} = -\frac{1}{x+1}$ geeft $x = -\frac{1}{3}$ 1
- Er moet gelden $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) + q = -\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ 1
- Dit geeft $q = -\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right)$, dus de gevraagde waarde van q is 0,95 1

Bronvermeldingen

Alle figuren Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2025